2.1.1 计算下列行列式的值

(2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

方1:

∵ 第一列和第二列呈比例 ∴ $|D|=0$

方2: $|D| = 1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} + 2\times(-1)^{1+3}\times\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 10+(-10)+0$

$=0$

2.1.2 计算下列行列式的值

(1). $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

按第一列展开

第1,3行呈比例

解: $|D| = 1\times(-1)^{4+1}\times\begin{vmatrix} \boxed{1 \quad 1 \quad -1} \\ 2 \quad -2 \quad -2 \\ \boxed{-1 \quad -1 \quad 1} \end{vmatrix} = 0$

先选定两行(定下来)

再遍历所有两列的情况

(4). $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ① $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ② $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ ③

本题 $a_{13}=a_{14}=a_{24}=0$ 使三个情况为零,所以我没写进去

方: 拉普拉斯展开

$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+3}$ ① $+ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+2+3}$ ②

$+ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}\cdot(-1)^{1+2+1+2}$ ③

$= 3\times(-5)\times(-1)+3\times(-9)+1\times(-19)$

$= 15-27-19$

$= -31$

方法：任一行k倍加至另一行，|D|不变　选取合适的倍数 $r_2+(-r_1)$，r_3+r_1，$r_4+(-2r_1)$ ——有关第一行的操作
第二行类似

$$\xlongequal{\text{第一行加至二、三、四行}}\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&3&0\\0&4&1&4\\0&0&5&1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{第二行加至第一、三、四行}}\begin{vmatrix}1&0&-3&0\\0&1&3&0\\0&0&-11&4\\0&0&5&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}1&3&0\\0&-11&4\\0&5&1\end{vmatrix}=1\times(-1)^{1+1}\times1\times(-1)^{1+1}\times\begin{vmatrix}-11&4\\5&1\end{vmatrix}$$

$=-31$

(7)、$\begin{vmatrix}3&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}$

解：加至第一列

$$|D|=\begin{vmatrix}6&1&1&1\\6&3&1&1\\6&1&3&1\\6&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&3&1&1\\1&1&3&1\\1&1&1&3\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{vmatrix}=6\times1\times2^3=48$$

(8)、$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&1\\1&1&-1&1\\1&1&1&-1\end{vmatrix}$　第一行负一倍加至二、三、四行

解：$|D|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=1\times(-2)^3=-8$

2.1.3 解下列方程

(1)、$\begin{vmatrix}x&x&2\\0&-1&1\\1&2&x\end{vmatrix}=0$

交换一、三行

$$|D|=\begin{vmatrix}1&2&x\\0&-1&1\\x&x&2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-xr_1}\begin{vmatrix}1&2&x\\0&-1&1\\0&-x&2-x^2\end{vmatrix}=0$$

展开: $1\times(-1)^{1+1}\times(x^2-2+x)=0$

$(x+2)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-2,\ x_2=1$

(4). $\begin{vmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ x-3 & x-1 & -1 \\ x-3 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = 0$

①. 当 $x=3$ 时, 显然 $|D|=0$ (行列式一列全为零)

② 当 $x\neq3$ 时

$|D| = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & x-1 & -1 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2(x-3)=0$ ∵ $x\neq3$ ∴ $x=0$

∴ 综上 $x=0$ 或 3

2.1.4 试证 $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3$

证明:

$|D| \xrightarrow[c_3-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & ab-a^2 & b^2-a^2 \\ 2a & b-a & 2b-2a \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1\times(-1)^{3+1}\times\left[(ab-a^2)(2b-2a)-(b^2-a^2)(b-a)\right]$

$= 2(ab-a^2)(b-a)-(b^2-a^2)(b-a)$

$=(b-a)(2ab-2a^2-b^2+a^2)$

$=(b-a)(-a^2+2ab-b^2)$

$=(a-b)(a^2-2ab+b^2)$

$=(a-b)^3$

2.1.6 证明：$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{vmatrix} = 0$

转置

$|D| = |D^T|$

证明：每一行提取一个 (-1)

$$|D| = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & -a_{14} & -a_{15} \\ a_{12} & 0 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ -a_{14} & -a_{24} & -a_{34} & 0 & a_{45} \\ -a_{15} & -a_{25} & -a_{35} & -a_{45} & 0 \end{vmatrix} = (-1)^5 |D| = -|D| \Rightarrow |D| = 0$$

说明：奇数阶反对称行列式值为0，偶数阶未必

2.1.9

$|D| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ 求 $2A_{31} - A_{32} + 2A_{33} + A_{34}$

解：思路：构造新的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \boxed{2 \quad -1 \quad 2 \quad 1} \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\because 第一、三行呈比例)$$

按第三行展开即为所求，问题转为求该行列式的值